



Zentrale Abiturprüfung 2012 Reservetermin

Weiterer Leistungskurs

Mathematik

Fachbereich Technik

Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler



Aufgabe 1

Beschreibung der Ausgangssituation

Eine Rakete hat die Startmasse m_0 , im Flug hat sie den konstanten Treibstoffdurchsatz μ in $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$ und eine konstante Ausströmgeschwindigkeit w in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Damit hat sie eine konstante Schubkraft von $\mu \cdot w$.

Nach dem Start reduziert sich die Masse m in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden nach der Funktionsgleichung:

$$m(t) = m_0 - \mu \cdot t, \quad t \in R_0^+$$

Aus der Betrachtung der auf die Rakete wirkenden Kräfte ergibt sich die folgende Beziehung zwischen der Masse m und der Beschleunigung a der Rakete:

$$\mu \cdot w - m(t) \cdot g = m(t) \cdot a(t)$$

($g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ist die Erdbeschleunigung)

Hinweis: Innerhalb der Berechnungen können die Einheiten vernachlässigt werden.

Aufgabenstellung

Punkte

- 1.1 Zeigen Sie, dass für die Beschleunigung a gilt: 11 P

$$a(t) = \frac{\mu \cdot w}{m_0 - \mu \cdot t} - g \quad \text{mit} \quad D_a = R \setminus \left\{ \frac{m_0}{\mu} \right\}$$

Begründen Sie, warum der mathematisch mögliche Definitionsbereich in diesem Sachzusammenhang auf einen technisch sinnvollen Definitionsbereich D_t eingeschränkt werden muss.

Ermitteln Sie die Intervallgrenzen des technisch sinnvollen Definitionsbereichs $D_t = [t_A; t_E]$.

- 1.2 Leiten Sie durch Ausführung der Integration über die Beschleunigung 8 P

$$v(t) = \int_0^t a(x) dx \quad \text{die Geschwindigkeitsfunktion } v \text{ der aufsteigenden}$$

Rakete in Abhängigkeit von der Zeit t her.



Für eine konkrete Rakete gilt: $m_0 = 45000$, $w = 2800$ und $\mu = 450$. Der technisch sinnvolle Definitionsbereich wird durch die Brenndauer von 30 Sekunden auf $D_k = [0; 30]$ eingeschränkt.

Verwenden Sie für die weiteren Berechnungen die folgende Geschwindigkeitsfunktion v der Rakete:

$$v(t) = w \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu \cdot t}\right) - g \cdot t \quad t \in D_k$$

- 1.3 Berechnen Sie die Geschwindigkeit, welche diese Rakete 20 Sekunden nach dem Start erreicht hat. Die Geschwindigkeit ist in $\frac{km}{h}$ anzugeben. 6 P

- 1.4 Bestimmen Sie die Extrema der Geschwindigkeitsfunktion v für die Rakete mit den obigen Parametern und interpretieren Sie Ihr Ergebnis unter Berücksichtigung des eingeschränkten Definitionsbereichs D_k . 12 P

Die Funktion s , welche den zurückgelegten Weg der Rakete beschreibt, ergibt sich als Stammfunktion der Geschwindigkeitsfunktion v zu:

$$s(t) = w \cdot t - \frac{w}{\mu} \cdot (m_0 - \mu \cdot t) \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu \cdot t}\right) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad t \in D_k$$

- 1.5 Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit der Rakete bis zum Ende ihrer Brenndauer. Das Ergebnis ist in $\frac{km}{h}$ anzugeben. 8 P

Hinweis: Der Mittelwert \bar{f} einer Funktion f über dem Intervall $[a; b]$

ist definiert als $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Gesamtpunkte Aufgabe 1 45 P

Aufgabe 2

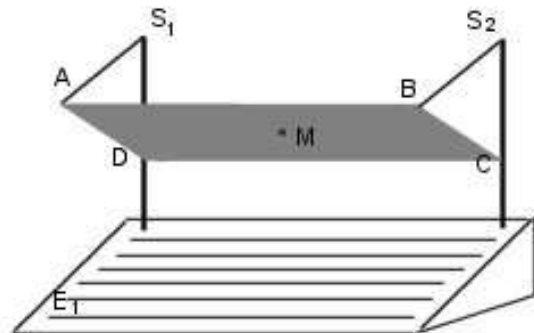
Beschreibung der Ausgangssituation

Das schräge Dach einer Zuschauertribüne kann durch die Eckpunkte ABCD in einer Planungsskizze zur Baukonstruktion beschrieben werden (1 LE entspricht 1 m).

Die Punkte A (6 | - 12 | 22),

B (38 | 4 | 22) und M (19 | 2 | 19) sind bekannt.

Dabei ist M der Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms ABCD.



Skizze nicht maßstabsgerecht

In den Punkten C und D ist das Dach an zwei senkrecht stehenden Masten befestigt.

Von den Mastspitzen S_1 (0 | 0 | 26) und S_2 (32 | 16 | 26) führt jeweils ein Befestigungsdrahtseil zu den Ecken A bzw. B des Tribünendaches.

Die Sitzreihen liegen in der Ebene $E_1: 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 65$.

Aufgabenstellung

Punkte

- | | | |
|-----|--|------|
| 2.1 | Geben Sie die Koordinaten der Punkte C und D des Dachparallelogramms an.
Ermitteln Sie rechnerisch, ob es sich bei dem Parallelogramm um ein Rechteck handelt. | 7 P |
| 2.2 | Für die statischen Berechnungen wird das Maß des Winkels $\angle(\overrightarrow{AS_1}, \overrightarrow{AD})$ benötigt, den die Seile mit dem Dach einschließen.
Bestimmen Sie die Größe des Winkels. | 7 P |
| 2.3 | Im Punkt M soll eine Videoüberwachungsanlage für die Tribüne installiert werden. Aus technischen Gründen muss ein Mindestabstand von 10 m zu jedem Punkt der Tribüne eingehalten werden.
Beurteilen Sie durch Rechnung, ob der Mindestabstand eingehalten wird. | 9 P |
| 2.4 | A' (6 -12 1), B' , C' und D' seien die Eckpunkte des überdachten Bereichs der Tribüne.
Diese Punkte entstehen durch die Projektion der Punkte A, B, C (32 16 16) und D (0 0 16) auf die Tribüne durch zur Bodenebene ($x_1 - x_2$ - Ebene) senkrechte Strahlen. Als Werbeargument soll genutzt werden: „mehr als 640 m ² überdachte Fläche“.
Berechnen Sie die Koordinaten der projizierten Punkte.
Zeigen Sie über das Maß der so begrenzten Fläche, dass das Werbeargument richtig ist. | 10 P |



- 2.5 Zur Stabilisierung des Daches sollen in den Punkten S_1 und S_2 weitere Stahlseile senkrecht zu den Dachkanten \overline{AD} bzw. \overline{BC} angebracht werden. Dabei sind die Punkte C und D durch $C (32 \mid 16 \mid 16)$ und $D (0 \mid 0 \mid 16)$ gegeben. Beurteilen Sie, ob der Lagerbestand von 15 m Stahlseil zur Stabilisierung des Daches ausreichend ist.

Gesamtpunkte Aufgabe 2 45 P



Aufgabe 3

Beschreibung der Ausgangssituation – Der manipulierte Würfel

Ein Würfelspieler hat zwei Würfel zur Verfügung: Einen Würfel vom Typ A, dieser soll als ideal angesehen werden, und einen manipulierten Würfel vom Typ B. Dieser wurde durch Einbau eines symmetrischen Gewichts auf der „1er“-Seite so verändert, dass er doppelt so häufig eine „6“ wie eine „1“ zeigt. Die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse „Augenzahl 2“ bis „Augenzahl 5“ betragen weiterhin jeweils $\frac{1}{6}$.

Im Folgenden bezeichne $P_A(i)$ bzw. $P_B(i)$ für $i = 1 ; .. ; 6$ die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse:

„Mit dem Würfel vom Typ A bzw. vom Typ B wurde bei einmaligem Wurf die Zahl i gewürfelt.“

Aufgabenstellung

Punkte

- 3.1 Bestimmen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeiten $P_B(1)$ und $P_B(6)$ und geben Sie dann die beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Ergebnisse des Würfeln mit einem Würfel Typ A und Typ B an. 8 P

Die Kontrollergebnisse $P_B(1) = \frac{1}{9}$ und $P_B(6) = \frac{2}{9}$ sind im Folgenden zu verwenden.

- 3.2 Es wird gleichzeitig mit je einem Würfel vom Typ A und vom Typ B gewürfelt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für das Erzielen eines Paschs (zwei gleiche Augenzahlen). 6 P
- 3.3 Zwei Spieler vereinbaren ein Würfelspiel wie folgt: Spieler A wirft einen Würfel vom Typ A, sein Ergebnis sei a , Spieler B einen Würfel vom Typ B mit Ergebnis b . Spieler A gewinnt bei $a \geq b$, Spieler B gewinnt bei $a < b$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn von A und die für einen Gewinn von B und entscheiden Sie, ob es sich um ein faires Spiel handelt. 6 P
- 3.4 Zur Untersuchung der Wahrscheinlichkeiten für das Würfeln einer „6“ mit einem B-Würfel wird eine Serie von 60 Würfeln gestartet. Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der erzielten „6er“. Erläutern Sie, welche Verteilung der Zufallsgröße X zugrunde liegt, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Ereignisse:
 E_1 : Es werden mindestens 10 und höchstens 15 „6er“ geworfen.
 E_2 : Es wird höchstens 46 Mal keine „6“ geworfen. 7 P



In einer weiteren Untersuchung soll zufällig (gleich wahrscheinlich) einer der beiden Würfel A oder B ausgewählt und dieser dann 250 Mal geworfen werden.

Betrachtet werde die Zufallsgröße X : Anzahl der „6er“ unter den 250 Würfeln und die bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$P_A(X \leq 47)$ Wurfresultat höchstens 47 „6er“ unter der Bedingung „es ist ein Würfel Typ A“ und

$P_B(X > 47)$ Wurfresultat mehr als 47 „6er“ unter der Bedingung „es ist ein Würfel Typ B“

3.5 Zeigen Sie, dass für die bedingten Wahrscheinlichkeiten gilt: 9 P

$$P_A(X \leq 47) \approx 0,8391 \text{ und } P_B(X > 47) \approx 0,8913 \text{ und}$$

stellen Sie die Ereignisse „Typ des Würfels: A“ bzw. „Typ des Würfels: B“ und „Anzahl 6er: höchstens 47“ bzw. „Anzahl 6er größer 47“ in einem vollständigen zweistufigen Baumdiagramm dar.

3.6 Aufgrund vieler Testreihen von jeweils 250 Würfeln entscheidet sich der Beobachter wie folgt: 9 P

Bei höchstens 47 „6er“ wird er eher auf das Vorliegen eines Würfels des Typs A tippen, bei mindestens 48 „6er“ wird er eher auf das Vorliegen eines Würfels des Typs B tippen.

Beurteilen Sie die Entscheidungen des Beobachters unter Betrachtung geeigneter bedingter Wahrscheinlichkeiten und leiten Sie die beiden Wahrscheinlichkeiten dafür her, dass der Beobachter falsche Schlussfolgerungen getroffen hat.

Gesamtpunkte Aufgabe 3 45 P



Anlagen: Tabellen der kumulierten Binomialverteilungen

In der ersten und letzten Zeile ist p aufgeführt, bei den kumulierten Wahrscheinlichkeiten sind die Nachkommastellen angegeben.

n	k	1/18	1/9	1/6	2/9	1/3	k	n
60	0	0,0324	0,0009	0,0000			59	60
	1	0,1468	0,0072	0,0002			58	
	2	0,3452	0,0308	0,0015	0,0000		57	
	3	0,5709	0,0878	0,0063	0,0003		56	
	4	0,7601	0,1894	0,0202	0,0012		55	
	5	0,8847	0,3315	0,0512	0,0041		54	
	6	0,9519	0,4944	0,1081	0,0118	0,0000	53	
	7	0,9824	0,6514	0,1958	0,0288	0,0001	52	
	8	0,9943	0,7815	0,3120	0,0609	0,0004	51	
	9	0,9984	0,8754	0,4464	0,1139	0,0012	50	
	10	0,9996	0,9353	0,5834	0,1912	0,0032	49	
	11	0,9999	0,9693	0,7079	0,2916	0,0077	48	
	12	1,0000	0,9867	0,8097	0,4086	0,0170	47	
	13		0,9947	0,8848	0,5321	0,0342	46	
	14		0,9981	0,9352	0,6506	0,0630	45	
	15		0,9993	0,9662	0,7544	0,1071	44	
	16		0,9998	0,9836	0,8378	0,1692	43	
	17		0,9999	0,9926	0,8995	0,2495	42	
	18		1,0000	0,9969	0,9416	0,3455	41	
	19			0,9988	0,9682	0,4516	40	
	20			0,9995	0,9837	0,5603	39	
	21			0,9998	0,9922	0,6639	38	
	22			1,0000	0,9965	0,7556	37	
	23				0,9985	0,8315	36	
	24				0,9994	0,8899	35	
	25				0,9998	0,9320	34	
	26				0,9999	0,9603	33	
	27				1,0000	0,9781	32	
	28					0,9886	31	
	29					0,9944	30	
	30					0,9974	29	
	31					0,9989	28	
	32					0,9995	27	
	33					0,9998	26	
	34					0,9999	25	
60	35					1,0000	24	60
n	k	17/18	8/9	5/6	7/9	2/3	k	n

Hinweis: Für Wahrscheinlichkeiten $p > 0,5$ lassen sich die untere Zeile und die rechte Spalte verwenden. Dabei gilt $P_{n;p}(X \leq k) = 1 - \text{"abgelesener Wert"}$



n	k	1/18	1/9	1/6	2/9	k	n
250	0					249	250
	1					248	
	2	0,0001				247	
	3	0,0004				246	
	4	0,0016				245	
	5	0,0050				244	
	6	0,0132				243	
	7	0,0301				242	
	8	0,0603				241	
	9	0,1080				240	
	10	0,1756				239	
	11	0,2624	0,0001			238	
	12	0,3641	0,0004			237	
	13	0,4735	0,0009			236	
	14	0,5826	0,0020			235	
	15	0,6835	0,0041			234	
	16	0,7707	0,0081			233	
	17	0,8413	0,0149			232	
	18	0,8950	0,0258			231	
	19	0,9336	0,0426			230	
	20	0,9599	0,0668			229	
	21	0,9768	0,0999	0,0001		228	
	22	0,9871	0,1430	0,0002		227	
	23	0,9931	0,1964	0,0005		226	
	24	0,9965	0,2596	0,0010		225	
	25	0,9983	0,3309	0,0019		224	
	26	0,9992	0,4081	0,0034		223	
	27	0,9996	0,4881	0,0060		222	
	28	0,9998	0,5678	0,0100		221	
	29	0,9999	0,6441	0,0163		220	
	30	1,0000	0,7143	0,0255		219	
	31		0,7766	0,0385	0,0001	218	
	32		0,8299	0,0563	0,0001	217	
	33		0,8739	0,0799	0,0002	216	
	34		0,9090	0,1100	0,0004	215	
	35		0,9361	0,1471	0,0007	214	
	36		0,9563	0,1914	0,0012	213	
	37		0,9709	0,2427	0,0021	212	
	38		0,9811	0,3002	0,0036	211	
	39		0,9881	0,3627	0,0058	210	
250	40		0,9927	0,4287	0,0091	209	250
n	k	17/18	8/9	5/6	7/9	k	n



n	k	1/18	1/9	1/6	2/9	k	n
250	41		0,9956	0,4963	0,0140	208	250
	42		0,9974	0,5635	0,0210	207	
	43		0,9985	0,6286	0,0306	206	
	44		0,9992	0,6898	0,0435	205	
	45		0,9996	0,7458	0,0605	204	
	46		0,9998	0,7958	0,0820	203	
	47		0,9999	0,8391	0,1087	202	
	48		0,9999	0,8758	0,1410	201	
	49		1,0000	0,9060	0,1790	200	
	50			0,9303	0,2227	199	
	51			0,9494	0,2716	198	
	52			0,9640	0,3251	197	
	53			0,9749	0,3822	196	
	54			0,9829	0,4417	195	
	55			0,9885	0,5023	194	
	56			0,9925	0,5625	193	
	57			0,9952	0,6212	192	
	58			0,9970	0,6769	191	
	59			0,9981	0,7287	190	
	60			0,9989	0,7759	189	
	61			0,9993	0,8178	188	
	62			0,9996	0,8543	187	
	63			0,9998	0,8855	186	
	64			0,9999	0,9115	185	
	65			0,9999	0,9327	184	
	66			1,0000	0,9498	183	
	67				0,9631	182	
	68				0,9734	181	
	69				0,9811	180	
	70				0,9869	179	
	71				0,9910	178	
	72				0,9940	177	
	73				0,9960	176	
	74				0,9974	175	
	75				0,9983	174	
	76				0,9990	173	
	77				0,9994	172	
	78				0,9996	171	
	79				0,9998	170	
	80				0,9999	169	
	81				0,9999	168	
250	82				1,0000	167	250
n	k	17/18	8/9	5/6	7/9	k	n

Hinweis: Für Wahrscheinlichkeiten $p > 0,5$ lassen sich die untere Zeile und die rechte Spalte verwenden. Dabei gilt $P_{n;p}(X \leq k) = 1 - \text{"abgelesener Wert"}$



Materialgrundlage (Quellenangaben, Fundstellen)

Skizze zu Aufgabe 2: eigene Anfertigung

Zugelassene Hilfsmittel

Für den Aufgabensatz 1 (ohne CAS) sind in der Abiturprüfung 2012 zugelassen:

- Gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten (Die Formelsammlungen sind vor Ausgabe an die Schülerinnen und Schüler zu überprüfen.)
- Tabellierte kumulierte Binomialverteilung
- Nicht programmierbare wissenschaftliche Taschenrechner

Für den Aufgabensatz 1 (ohne CAS) sind in der Abiturprüfung 2012 **nicht** zugelassen:

- Schulinterne eigene Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika
- Computeralgebrasysteme
- Taschenrechner, die über eines der folgenden Leistungsmerkmale verfügen:
 - Darstellen von Funktionsgraphen
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
 - Numerisches Integrieren oder Differenzieren
 - Rechnen mit Matrizen und Vektoren

Punktevergabe und Arbeitszeit

Inhaltliche Leistung (Verstehensleistung)	135 Punkte
Darstellungsleistung	15 Punkte
Gesamtpunktzahl	150 Punkte

Bearbeitungszeit	255 Minuten
------------------	-------------